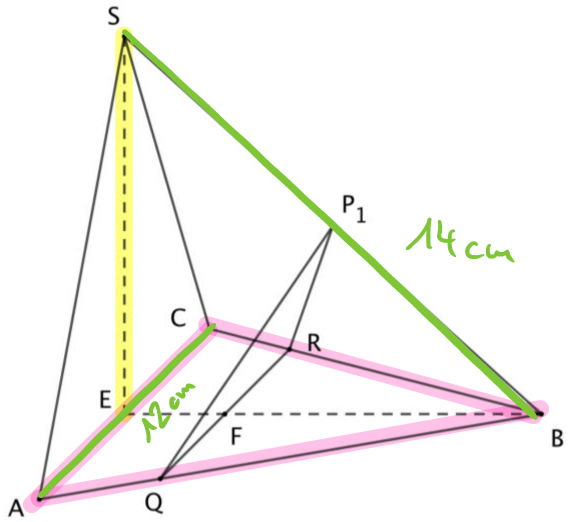
Räumliche Geometrie

Zusatzaufgabe zu Pyramiden

Aufgabe 1



1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS, deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 12$ cm ist. Der Mittelpunkt der Strecke [AC] ist der Punkt E. Die Spitze S der Pyramide ABCS liegt senkrecht über dem Punkt E.
Weiter gilt: $\overline{BS} = 14$ cm.

1.1 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecke [ES] und das Maß β des Winkels ∢SBE gilt:
$\overline{ES} = 9{,}38$ cm; $\beta = 42{,}07°$
[Teilergebnis: $\overline{EB} = 10{,}39$ cm]

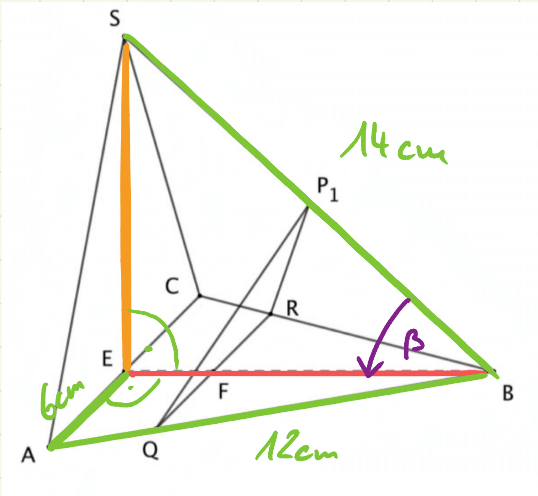
1.2 Auf der Kante [BS] der Pyramide ABCS liegen Punkte P_n. Der Punkt P_1 mit $\overline{BP_1} = 7$ cm ist Eckpunkt des Dreiecks RQP_1 mit $Q \in [AB]$ und $R \in [BC]$. Es gilt: $[QR] \parallel [AC]$. Der Punkt $F \in [EB]$ ist der Mittelpunkt der Strecke [QR]. $\overline{EF} = 2{,}5$ cm.

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke [QR].
[Ergebnis: $\overline{QR} = 9{,}11$ cm]

1.3 Das Dreieck RQB ist Grundfläche der Pyramide $RQBP_1$.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $RQBP_1$.

1.4 Bestimmen Sie durch Rechnung die Fläche der Dreiecksseite RQP_1.

1.1



$\triangle ABE$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2$$

$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2}$$

$$\overline{EB} = \sqrt{12^2 - 6^2}\,cm$$

$$= 10{,}39\,cm$$

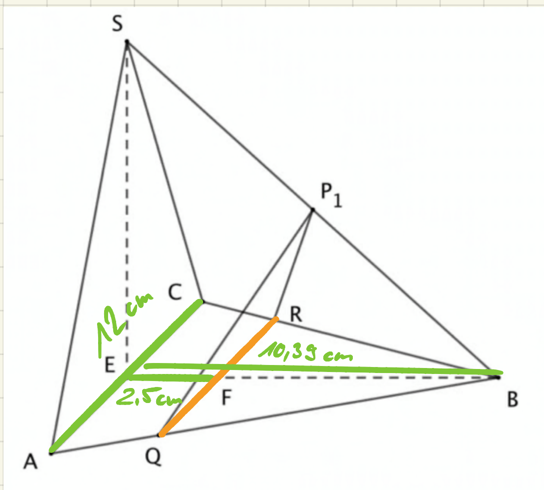
$\triangle EBS$:

- $\overline{ES} = \sqrt{14^2 - 10{,}39^2}\,cm = \underline{\underline{9{,}38\,cm}}$
- $\cos\beta = \dfrac{10{,}39\,cm}{14\,cm}$ $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{10{,}39}{14}\right) = \underline{\underline{42{,}09°}}$

alt:

$\sin\beta = \dfrac{9{,}38\,cm}{14\,cm}$ $\beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{9{,}38}{14}\right) = \underline{\underline{42{,}07°}}$

1.2

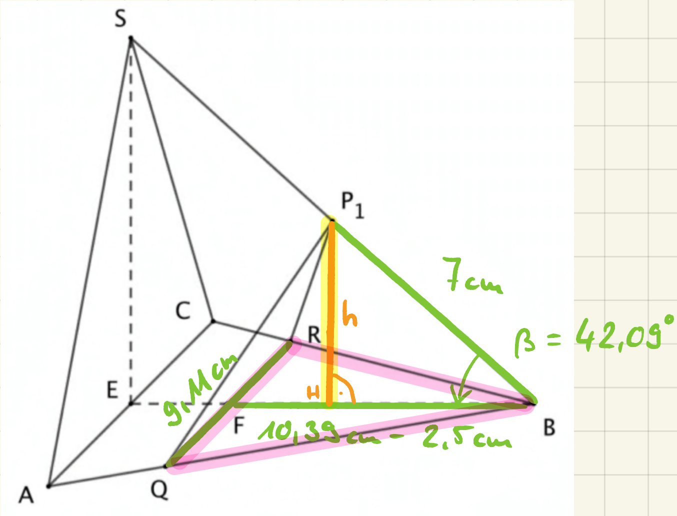


$\triangle ABC$: (Vierstreckensatz)

$$\frac{\overline{RQ}}{12\,cm} = \frac{10{,}39\,cm - 2{,}5\,cm}{10{,}39\,cm}$$

$$\overline{RQ} = \underline{\underline{9{,}11\,cm}}$$

1.3



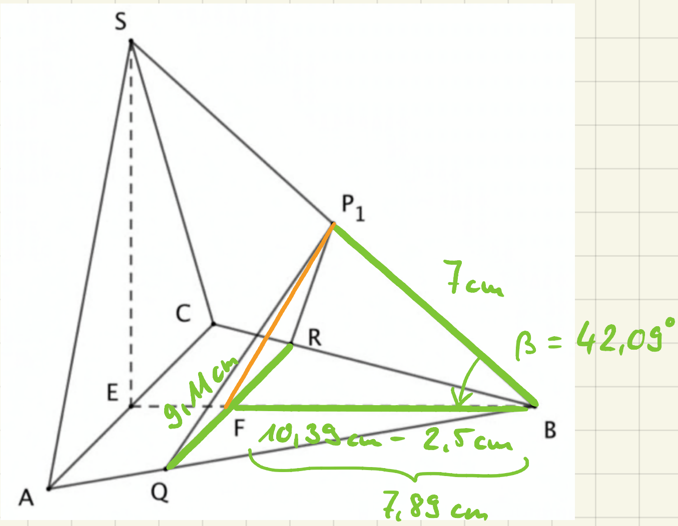
ΔHBP_1:

$$\sin 42{,}09° = \frac{h}{7\,\text{cm}}$$

$$h = 7\,\text{cm} \cdot \sin 42{,}09°$$
$$= 4{,}69\,\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{QBR} \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot (10{,}39 - 2{,}5) \cdot 4{,}69\,\text{cm}^3$$
$$= \underline{\underline{56{,}18\,\text{cm}^3}}$$

1.4



ΔFBP_1: (Kosinussatz)

$$\overline{FP_1} = \sqrt{7{,}89^2 + 7^2 - 2 \cdot 7{,}89 \cdot 7 \cdot \cos 42{,}09°}\,\text{cm}$$
$$= 5{,}41\,\text{cm}$$

$$A_{RQP_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{FP_1} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11\,\text{cm} \cdot 5{,}41\,\text{cm} = \underline{\underline{24{,}64\,\text{cm}^2}}$$